模块四 三角函数提高篇

第 1 节 三角函数图象性质综合问题（★★★☆）

强化训练

1．（2018·北京卷·★★）设 $f(x)=\cos(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$，若 $f(x)\le f(\frac{\pi}{4})$ 对任意实数 x 都成立，则 ω 的最小值为_____.

答案：$\frac{2}{3}$

解析：要求 ω 的最小值，得先把 ω 表示出来，可用 $f(\frac{\pi}{4})$ 为最大值来表示，

$f(x)\le f(\frac{\pi}{4})$ 恒成立 $\Rightarrow f(\frac{\pi}{4})$ 是 $f(x)$ 的最大值，

所以 $f(\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{6})=1$，从而 $\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{6}=2k\pi$，

故 $\omega=8k+\frac{2}{3}(k\in\mathbf{Z})$，又 $\omega>0$，所以 $\omega_{\min}=\frac{2}{3}$.

2．（★★★）已知 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π，且关于 $(-\frac{\pi}{8},0)$ 对称，则（　　）

（A）$f(0)<f(2)<f(1)$　　（B）$f(2)<f(1)<f(0)$　　（C）$f(2)<f(0)<f(1)$　　（D）$f(1)<f(0)<f(2)$

答案：B

解析：$f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，

又 $f(x)$ 关于 $(-\frac{\pi}{8},0)$ 对称，

所以 $f(-\frac{\pi}{8})=\sin[2\times(-\frac{\pi}{8})+\varphi]=0$，故 $\sin(\varphi-\frac{\pi}{4})=0$，

结合 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ 可得 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$，

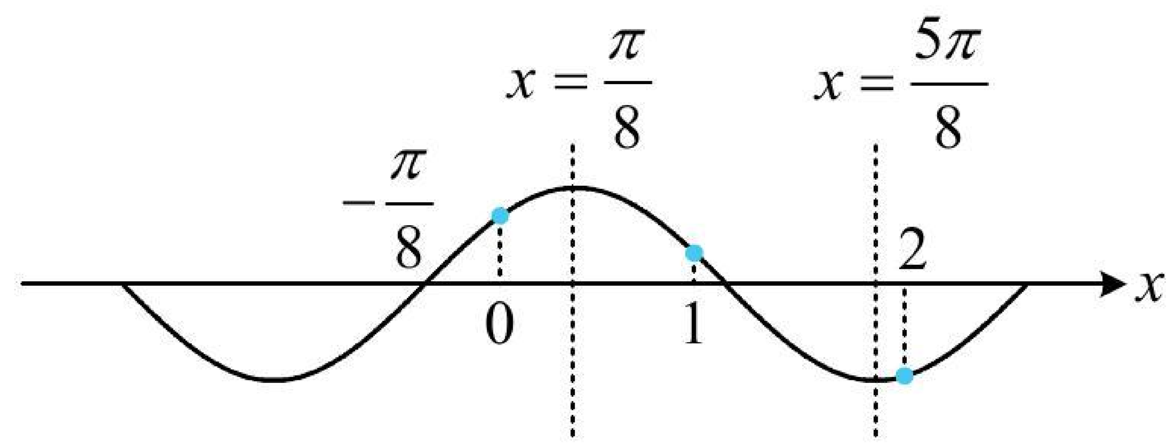
要比较 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ 的大小，可作出 $f(x)$ 的草图，将 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ 在图中标出来看，$-\frac{\pi}{8}$ 是零点，结合周期为 π 可得 $x=\frac{\pi}{8}$ 必为最值点，$f(\frac{\pi}{8})=\sin(2\times\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4})=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{8}$ 是最大值点，

如图，由图可知，$f(2)<0$，$f(0)>0$，$f(1)>0$，

所以 $f(2)$ 必定最小，

要比较 $f(0)$ 和 $f(1)$ 的大小，可比较 0 和 1 离 $x=\frac{\pi}{8}$ 的距离，距离越小，函数值越大，

又 $\frac{\pi}{8}-0<1-\frac{\pi}{8}$，所以 $f(0)>f(1)$，故 $f(2)<f(1)<f(0)$.



3.（★★★）已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+2$，则 $f(\frac{\pi}{8})+f(\frac{2\pi}{8})+\cdots+f(\frac{13\pi}{8})=$（　　）

（A）0　（B）10　（C）16　（D）26

答案：D

解析：逐个代入计算较麻烦，但可发现 $\frac{\pi}{8}$ 和 $\frac{13\pi}{8}$，$\frac{2\pi}{8}$ 和 $\frac{12\pi}{8}$，…，$\frac{6\pi}{8}$ 和 $\frac{8\pi}{8}$ 两两关于 $\frac{7\pi}{8}$ 对称，故猜想 $\frac{7\pi}{8}$ 可能与 $f(x)$ 的对称性有关，我们先验证这一猜想，

因为 $f(\frac{7\pi}{8})=\sqrt{2}\sin(2\times\frac{7\pi}{8}+\frac{\pi}{4})+2=\sqrt{2}\sin 2\pi+2=2$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $B(\frac{7\pi}{8},2)$ 对称，

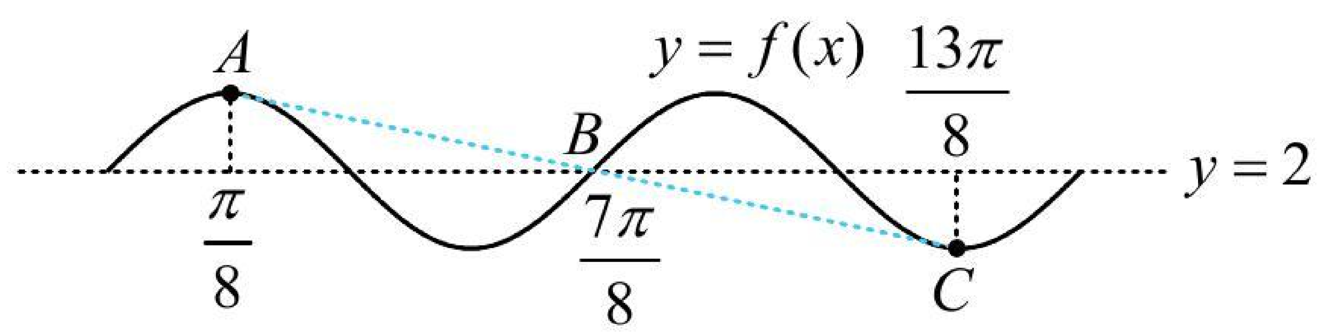
既然 B 是对称中心，那么其它点必定也两两关于该点对称，可画图来看看，

如图，$A(\frac{\pi}{8},f(\frac{\pi}{8}))$ 和 $C(\frac{13\pi}{8},f(\frac{13\pi}{8}))$ 关于 B 对称，

所以 $\frac{f(\frac{\pi}{8})+f(\frac{13\pi}{8})}{2}=f(\frac{7\pi}{8})$，故 $f(\frac{\pi}{8})+f(\frac{13\pi}{8})=2f(\frac{7\pi}{8})=4$，

同理，$f(\frac{2\pi}{8})+f(\frac{12\pi}{8})=f(\frac{3\pi}{8})+f(\frac{11\pi}{8})=\cdots=f(\frac{6\pi}{8})+f(\frac{8\pi}{8})=4$，

所以 $f(\frac{\pi}{8})+f(\frac{2\pi}{8})+\cdots+f(\frac{13\pi}{8})=4\times 6+2=26$.



4.（2022•潍坊一模•★★★）设函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 在 $[a,a+\frac{\pi}{4}]$ 的最大值为 $g_1(a)$，最小值为 $g_2(a)$，则 $g_1(a)-g_2(a)$ 的最小值为（　　）

（A）1　（B）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　（C）$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　（D）$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

答案：D

解析：要研究 $f(x)$ 的区间最值，可将 $2x+\frac{\pi}{3}$ 换元成 t，转化为研究 $y=\sin t$ 的区间最值，

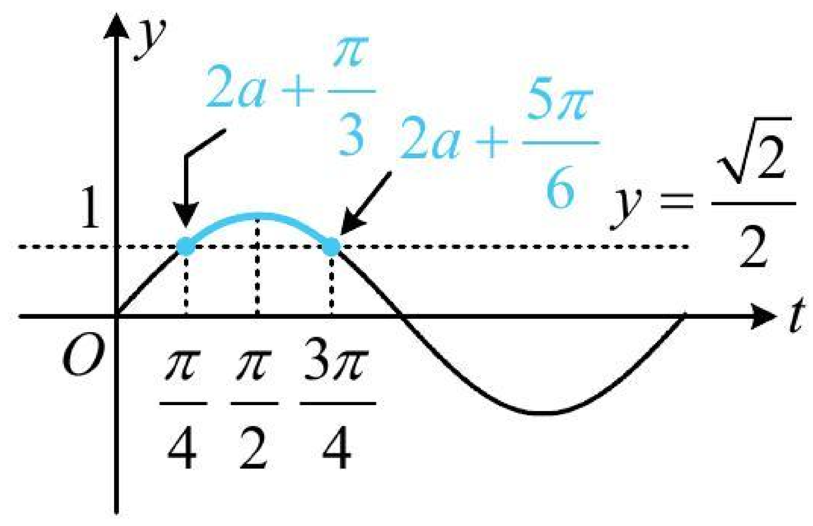
令 $t=2x+\frac{\pi}{3}$，则 $f(x)=\sin t$，

当 $x\in[a,a+\frac{\pi}{4}]$时，$t\in[2a+\frac{\pi}{3},2a+\frac{5\pi}{6}]$，

下面画图分析，区间 $[2a+\frac{\pi}{3},2a+\frac{5\pi}{6}]$ 的位置会随 a 的变化而改变，但其宽度保持 $\frac{\pi}{2}$ 不变，始终为 $y=\sin t$ 的四分之一个周期. 建议结合图象想象运动过程，

如图所示的情形即为 $g_1(a)-g_2(a)$ 最小的情形，

由图可知 $g_1(a)-g_2(a)$ 的最小值为 $1-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.



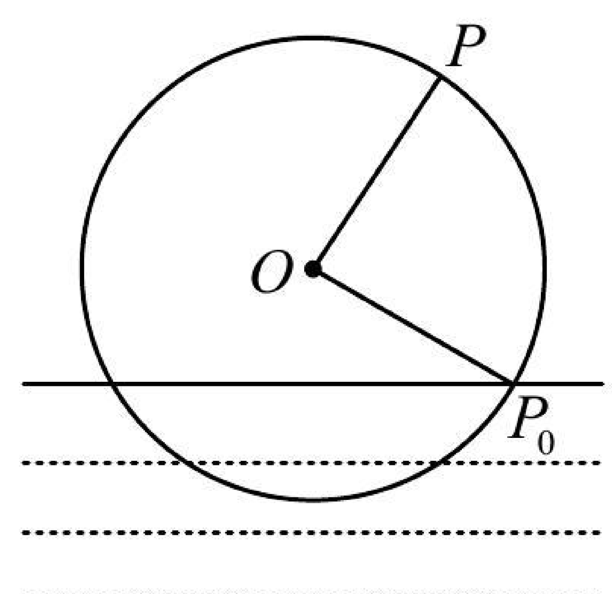
5.（2022•确山月考•★★★）一半径为4.8m 的水轮如图所示，水轮圆心 O 距离水面 2.4m，已知水轮每 60s 逆时针转动一圈，如果当水轮上点 P 从水中浮现时（图中点 P_0）开始计时，则（　　）

（A）点 P 离水面的距离 d（单位：m）与时间 t（单位：s）的函数解析式为 $d=4.8\sin(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{6})-2.4$

（B）点 P 第一次到达最高点需要 10s

（C）在水轮转动的一圈内，点 P 离水面的高度不低于 4.8m 共有 10s 时间

（D）当水轮转动 50s 时，点 P 在水面下方，距离水面 2.4m



答案：D

解析：由题意，可设点 P 离水面的距离 $d=A\sin(\omega t+\varphi)+B(A>0,\omega>0)$，

先由题干信息求出 A，B，ω，φ，再判断选项，首先由最大、最小值求 A 和 B，

因为水轮半径为 4.8m，圆心 O 离水面 2.4m，

所以 $d_{\max}=4.8+2.4=7.2$，$d_{\min}=2.4-4.8=-2.4$，

从而 $\begin{cases}A+B=7.2\\-A+B=-2.4\end{cases}$，故 $A=4.8$，$B=2.4$，

再由周期求 ω，因为水轮每 60s 逆时针转动一圈，

所以 $T=60$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{30}$，

最后由初相位求φ，如图 1，OA 为水平线，$OC \perp P_0C$ 于 C，$P_0C // OA$，由题意，$OC = 2.4$，$OP_0 = 4.8$，

所以$\angle OP_0C = \dfrac{\pi}{6}$，从而$\angle AOP_0 = \dfrac{\pi}{6}$，

故以 OA 为始边，OP_0为终边的角可以为$-\dfrac{\pi}{6}$，

因为当$t = 0$时，点 P 在 P_0 处，所以初相位$\varphi = -\dfrac{\pi}{6}$，

从而$d = 4.8\sin(\dfrac{\pi}{30}t - \dfrac{\pi}{6}) + 2.4$，故 A 项错误；

B 项，令$\dfrac{\pi}{30}t - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$可得$t = 20$，所以点 P 第一次到达最高点需要 20s，故 B 项错误；

C 项，令$d \ge 4.8$可得$\sin(\dfrac{\pi}{30}t - \dfrac{\pi}{6}) \ge \dfrac{1}{2}$，

只需在一个周期内解此不等式，不妨在$[0,60)$这个周期内来看，先将$\dfrac{\pi}{30}t - \dfrac{\pi}{6}$换元成 u，

令$u = \dfrac{\pi}{30}t - \dfrac{\pi}{6}$，则$\sin u \ge \dfrac{1}{2}$，

当$t \in [0,60)$时，$u \in [-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6})$，如图 2，

由图可知，$\sin u \ge \dfrac{1}{2}$在$[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6})$上的解集为$[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}]$，

所以$\dfrac{\pi}{6} \le \dfrac{\pi}{30}t - \dfrac{\pi}{6} \le \dfrac{5\pi}{6}$，故$10 \le t \le 30$，

所以水轮转 1 圈，点 P 离水面的高度不低于 4.8m 共有 20s 时间，故 C 项错误；

D 项，当$t = 50$时，$d = 4.8\sin(\dfrac{\pi}{30} \times 50 - \dfrac{\pi}{6}) + 2.4$

$= 4.8\sin\dfrac{3\pi}{2} + 2.4 = -2.4$，故 D 项正确.

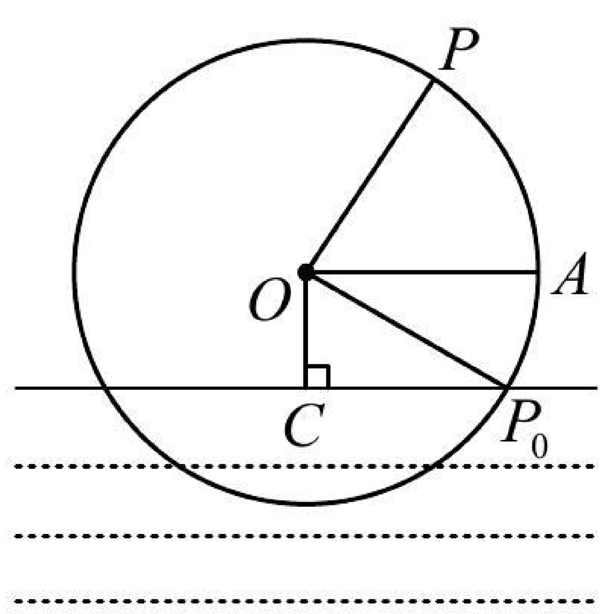


图1

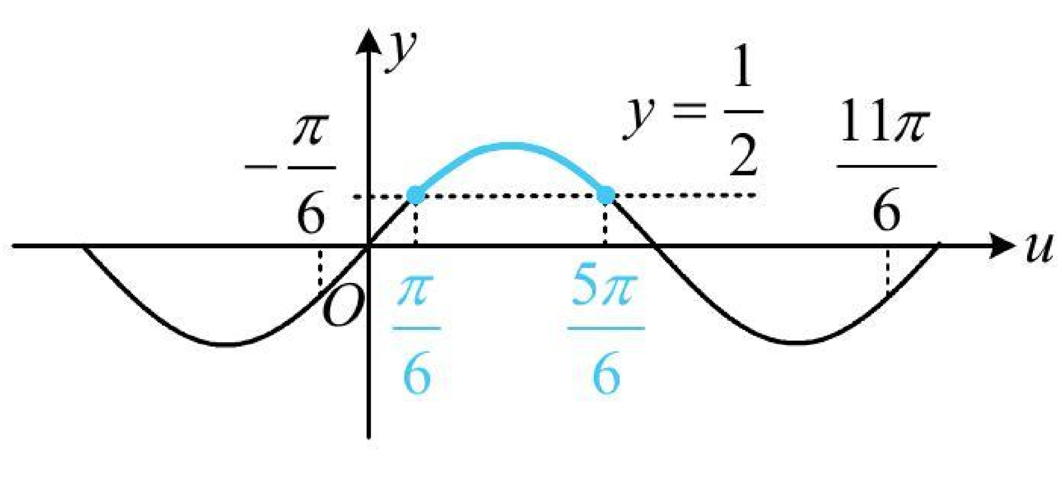


图2

6.（★★★★）已知函数$f(x) = \sin(\omega x + \varphi)(\omega > 0)$，若$-\dfrac{\pi}{4}$是$f(x)$的零点，$x = \dfrac{\pi}{4}$是$f(x)$的图象的对称轴，且对任意的$x \in (\dfrac{11\pi}{36}, \dfrac{17\pi}{36})$，$|f(x)| < 1$，则$\omega$的最大值为（　　）

（A）5　（B）4　（C）3　（D）2

答案：C

解析：条件中有一个零点和一条对称轴，它们之间的距离为$\frac{T}{4}$的正奇数倍，可由此建立ω的通解，

设$f(x)$的最小正周期为T，因为$-\frac{\pi}{4}$是$f(x)$的零点，

且$x=\frac{\pi}{4}$是$f(x)$的对称轴，所以$\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4})=(2k-1)\cdot\frac{T}{4}$，

从而$\frac{\pi}{2}=(2k-1)\cdot\frac{\pi}{2\omega}$，故$\omega=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$，

所以ω必为奇数，故排除选项B、D；

因为对任意的$x\in(\frac{11\pi}{36},\frac{17\pi}{36})$，$|f(x)|<1$，所以$f(x)$在$(\frac{11\pi}{36},\frac{17\pi}{36})$上没有最值点，

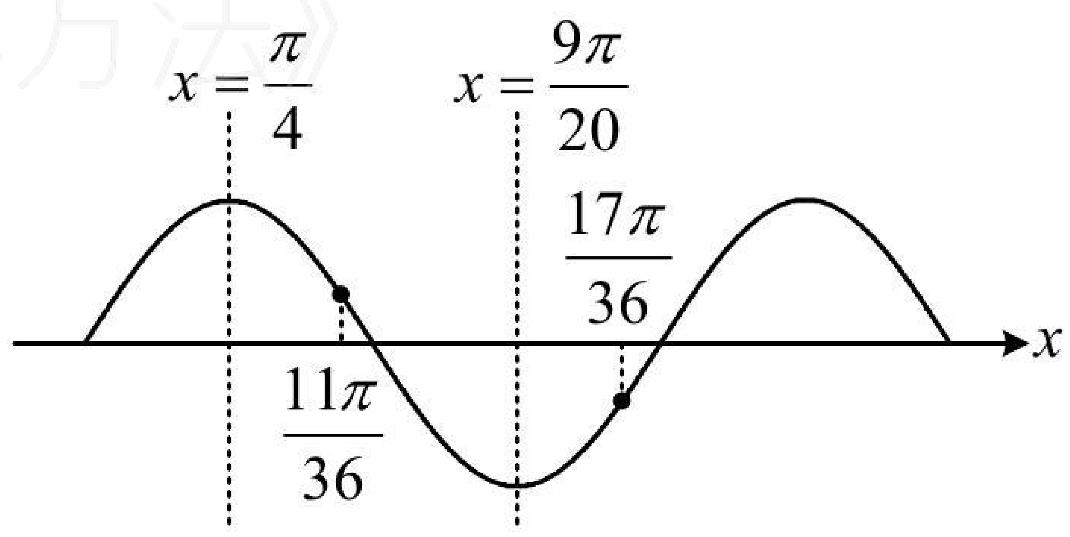
要将这一条件翻译成ω的范围较为繁琐，作为选择题，可直接验证A选项是否满足题意，

若$\omega=5$，则$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{5}$，

有了周期，可结合$x=\frac{\pi}{4}$是对称轴去推知其它对称轴，从而判断$f(x)$在$(\frac{11\pi}{36},\frac{17\pi}{36})$上是否有最值点，

如图，因为$\frac{\pi}{4}+\frac{T}{2}=\frac{9\pi}{20}$，所以$x=\frac{9\pi}{20}$也是$f(x)$的对称轴，故$\left|f(\frac{9\pi}{20})\right|=1$，而$\frac{9\pi}{20}\in(\frac{11\pi}{36},\frac{17\pi}{36})$，矛盾，

从而$\omega=5$不合题意，排除A，故选C.



【反思】对称轴和对称中心之间的距离一定是$\frac{T}{4}$的正奇数倍，这一结论的图形解释可参考本节例5的变式.

7.（★★★★）已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$的图象与$x$轴相邻的两个交点的横坐标分别为$\frac{\pi}{6}$和$\frac{2\pi}{3}$，将$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位得到$g(x)$的图象，若$A$，$B$，$C$为两个函数图象的不共线的交点，则$\Delta ABC$面积的最小值为_____.

答案：$\sqrt{2}\pi$

解析：设$f(x)$的最小正周期为T，由题意，$\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow T=\pi\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，

$f(\frac{\pi}{6})=2\sin(2\times\frac{\pi}{6}+\varphi)=0\Rightarrow\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)=0$，又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=-\frac{\pi}{3}$，故$f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，

由题意，$g(x)=f(x+\frac{\pi}{4})=2\sin[2(x+\frac{\pi}{4})-\frac{\pi}{3}]=2\sin[(2x-\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{2}]=2\cos(2x-\frac{\pi}{3})$，

既然涉及$f(x)$和$g(x)$图象的交点，就令$f(x)=g(x)$，求解交点的坐标，便于作图，

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \sin(2x-\frac{\pi}{3})=\cos(2x-\frac{\pi}{3})$，把 $2x-\frac{\pi}{3}$ 看作整体，有 $\sin^2(2x-\frac{\pi}{3})+\cos^2(2x-\frac{\pi}{3})=1$，

所以 $\sin(2x-\frac{\pi}{3})=\cos(2x-\frac{\pi}{3})=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，这说明 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的交点都在直线 $y=\sqrt{2}$ 和 $y=-\sqrt{2}$ 上，

不妨假设 A，B 两点在直线 $y=\sqrt{2}$ 上，点 C 在直线 $y=-\sqrt{2}$ 上，则 AB 边上的高 $h=2\sqrt{2}$，

要使面积最小，只需底边 AB 的长最小，那么 A，B 就是直线 $y=\sqrt{2}$ 上相邻的两个交点，

从而 ΔABC 的面积最小的情形如图所示，由图可知，$|AB|=T=\pi$，所以 $(S_{\Delta ABC})_{\min}=\frac{1}{2}\times\pi\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}\pi$.